Resolución Básica

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA

Contenidos

- Introducción
- La regla de resolución
- El método de resolución de Robinson

Introducción (I)

- Sabemos que {ll $\vee$ s *(llueve o hace sol)*, ¬ll *(no llueve)*, ¬s *(no hace sol)*} define la fórmula (ll $\vee$ s) $\wedge$ ¬ll $\wedge$ ¬s

ll	s	ll $\vee$ s	¬ll	¬s	(ll $\vee$ s) $\wedge$ ¬ll $\wedge$ ¬s
V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F

Insatisfacible

- También podemos demostrar que T[ll $\vee$ s, ¬ll, ¬s] $\vdash$ s $\wedge$ ¬s
  1. ll $\vee$ s   premisa
  2. ¬ll   premisa
  3. s   corte 1,2
  4. ¬s   premisa
  5. s $\wedge$ ¬s   I$\wedge$ 3,4

- Por tanto, de una fórmula insatisfacible hemos llegado a deducir una contradicción

Introducción (II)

- **Idea general**: Plantear un método de obtención de nuevas fórmulas deducidas del conjunto original, de forma que si se consigue deducir un literal y su negación puede concluirse que el conjunto original es insatisfacible
- Está basado en el lema de la contradicción: Una fórmula F es insatisfacible sii a partir de ella se puede deducir una contradicción ($T[F] \vdash P \wedge \neg P$)
  1. $T[F] \vdash P \wedge \neg P$ sii $\vDash F \rightarrow P \wedge \neg P$ (teorema de la deducción)
  2. Por definición: $\vDash F \rightarrow P \wedge \neg P$ sii en toda interpretación i o bien i(F) = F o bien i(F) = V y $i(P \wedge \neg P)$ = V
  3. Pero $i(P \wedge \neg P)$ = F para toda i, por tanto $\vDash F \rightarrow P \wedge \neg P$ sii en toda interpretación i, i(F) = F
  4. $\vDash F \rightarrow P \wedge \neg P$ sii F es insatisfacible
  5. $T[F] \vdash P \wedge \neg P$ sii F es insatisfacible (silogismo 1,4)

La Regla de Resolución (I)

- **Principio de resolución**: Proporciona un método automático para realizar demostraciones a partir de cláusulas
- La deducción de nuevas fórmulas está basada en la **regla de resolución básica**:
  - Basada en la regla de corte: A v B , $\neg$ A v C $\Rightarrow$ B v C
  - De dos cláusulas L $\vee$ C1 y $\neg$L $\vee$ C2 (L es un literal) puede deducirse una nueva cláusula C1 $\vee$ C2, llamada **resolvente**

$$L \vee C1 \qquad \neg L \vee C2$$

$$C1 \vee C2$$

La Regla de Resolución (II)

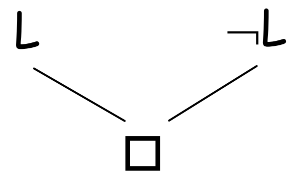
- **Resolvente**: Sean C1 y C2 cláusulas. Supongamos que el literal L Є C1 y su complementario Lc Є C2. Se denomina resolvente de C1 y C2 respecto a L a la cláusula a:
  - Res(C1, C2) = (C1 - {L}) U (C2 - {Lc})

$$\frac{L \lor C1 \qquad \neg L \lor C2}{C1 \lor C2}$$

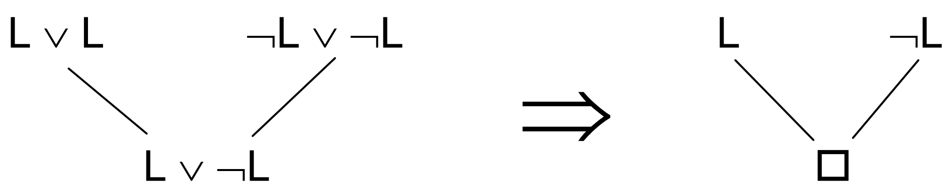
- La aplicación sucesiva de la regla de resolución permite obtener una contradicción cuando el conjunto original es insatisfacible
  - La contradicción se obtiene cuando se deducen dos cláusulas atómicas (literales aislados) L y $\neg$L

La Regla de Resolución (III)

- La aplicación de la regla sobre L y ¬L genera la llamada **cláusula vacía (□)**



- Para asegurarnos deducir la cláusula vacía siempre que el conjunto sea insatisfacible, necesitamos tener en cuenta la idempotencia ($L \lor L \Rightarrow L$)



La Regla de Resolución (IV)

- Ejemplo: $S = \{ p \vee q, \neg p \vee r, \neg q \vee r, \neg r, p \vee t \}$

1) $p \vee q$
2) $\neg p \vee r$
3) $\neg q \vee r$
4) $\neg r$
5) $p \vee t$
6) $Res(C1, C2) = q \vee r = C6$
7) $Res(C3, C4) = \neg q = C7$
8) $Res(C7, C6) = r = C8$
9) $Res(C8, C4) = \square$

La Regla de Resolución (V)

- **Regla de resolución básica extendida**:
  - De dos cláusulas $L \vee \ldots \vee L \vee C1$ y $\neg L \vee \ldots \vee \neg L \vee C2$ (L es un literal) puede deducirse una cláusula $C1 \vee C2$
- La aplicación de esta regla extendida se denomina paso de resolución sobre L con resolvente $C1 \vee C2$

El Método de Resolución de Robinson (I)

- El método se basa en la aplicación sucesiva de la regla de resolución básica (extendida), definiendo lo que se conoce también como procedimiento de saturación
- **Procedimiento de saturación**: Sea C un conjunto de cláusulas
  1) Sea $S_0 = C$ y $n = 0$
  2) Si $\square \in S_n \rightarrow$ C es insatisfacible
  3) Construir $S_{n+1} = \{$resolventes de C1 y C2 / $C1 \in (S_0 \cup \ldots \cup S_n)$, $C2 \in S_n\}$
  4) Si $S_{n+1} = \emptyset$ o $S_{n+1} \subset S_0 \cup \ldots \cup S_n \rightarrow$ C es satisfacible
  5) Hacer n = n+1 y repetir desde 2)
- Este procedimiento genera todos y sólo los resolventes posibles a partir de un conjunto de cláusulas

Procedimiento de Saturación (I)

	1)	$P \vee Q$	
$S_0=C$:	2)	$\neg P \vee Q$	
	3)	$P \vee \neg Q$	
	4)	$\neg P \vee \neg Q$	
	5)	Q	de 1) y 2)
S_1:	6)	P	de 1) y 3)
	7)	$Q \vee \neg Q$	de 1) y 4)
	8)	$P \vee \neg P$	de 1) y 4)
	9)	$Q \vee \neg Q$	de 2) y 3)
	10)	$P \vee \neg P$	de 2) y 3)
	11)	$\neg P$	de 2) y 4)
	12)	$\neg Q$	de 3) y 4)
	13)	$P \vee Q$	de 1) y 7)
S_2:	14)	$P \vee Q$	de 1) y 8)
	15)	$P \vee Q$	de 1) y 9)
	16)	$P \vee Q$	de 1) y 10)
	17)	Q	de 1) y 11)
	18)	P	de 1) y 12)
	19)	Q	de 2) y 6)
	20)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 7)
	21)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 8)

22)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 9)
23)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 10)
24)	$\neg P$	de 2) y 12)
25)	P	de 3) y 5)
26)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 7)
27)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 8)
28)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 9)
29)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 10)
30)	$\neg Q$	de 3) y 11)

31)	$\neg P$	de 4) y 5)
32)	$\neg Q$	de 4) y 6)
33)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 7)
34)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 8)
35)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 9)
36)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 10)
37)	Q	de 5) y 7)
38)	Q	de 5) y 9)
39)	$\square$	de 5) y 12)

C es insatisfacible

Procedimiento de Saturación (II): Ejemplo

S_0= C:	1)	$P \lor Q$	
	2)	$\neg P \lor R$	
	3)	$R \lor \neg Q$	
	4)	P	
S_1:	5)	$Q \lor R$	de 1) y 2)
	6)	$P \lor R$	de 1) y 3)
	7)	R	de 2) y 4)
S_2:	8)	R	de 2) y 6)
	9)	R	de 3) y 5)

Como S2 $\subset$ S1 y no es posible por tanto deducir $\square$ entonces C es **satisfacible**

Ejercicio

- **$C = \{C_1: \neg p,\ C_2: p \vee q,\ C_3: p \vee \neg q\}$**
- resuelve C_1 con C_2: q
- resuelve C_1 con C_3: $\neg q$
- resuelve C_2 con C_3: $p \vee p$
- $R = \{C_4: q,\quad C_5: \neg q,\quad C_6: p \vee p\}$
- En R no está $\square$, por tanto redefinimos $C = C \cup R$ y buscamos nuevos resolventes:
- resuelve C_1 con C_4: NO
- resuelve C_1 con C_5: NO
- resuelve C_1 con C_6: p

resuelve C_2 con C_4: NO
resuelve C_2 con C_5: p
resuelve C_2 con C_6: NO

- resuelve C_3 con C_4: p
- resuelve C_3 con C_5: NO
- resuelve C_3 con C_6: NO

resuelve C_4 con C_5: $\square$
resuelve C_4 con C_6: NO

- resuelve C_5 con C_6: NO
- $R = \{C_7: p, \square\}$

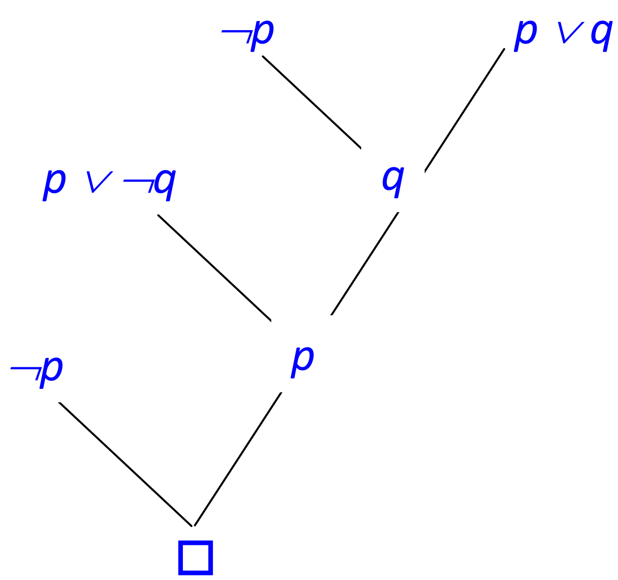
- R incluye a $\square$ ➔ **C es insatisfacible**

El Método de Resolución de Robinson (II)

- En la práctica, la aplicación de sucesivos pasos de resolución se puede representar en forma de árbol (**árbol de resolución**):
  - árbol binario invertido (cada dos nodos tienen un ‘hijo’ común)
  - cada nodo representa una cláusula
  - el nodo hijo de otros dos nodos es el resolvente de las cláusulas correspondientes
- En el árbol de resolución sólo se representan los pasos relevantes para llegar a $\square$

El Método de Resolución de Robinson (III)

Conjunto de cláusulas: $\{\neg p,\ p \vee q,\ p \vee \neg q\}$



Puede deducirse por resolución la cláusula vacía, por lo que el conjunto de cláusulas es ***insatisfacible***

El Método de Resolución de Robinson (IV)

- El método de resolución es correcto
  - Si por la aplicación sucesiva de la regla de resolución deducimos □, entonces el conjunto inicial de cláusulas es insatisfacible
- El método de resolución es completo
  - Si el conjunto inicial es insatisfacible, entonces podemos asegurar que con la aplicación sucesiva de la regla de resolución llegaremos a deducir la cláusula vacía
- **Un conjunto de cláusulas es insatisfacible sii se puede deducir □ a partir de él por resolución**
  - Se puede definir un nuevo sistema de deducción basado en la regla de resolución. Este sistema tendría una única regla y por tanto sería mucho más simple que otros sistemas de deducción formales que utilizan más reglas de deducción (por ejemplo, deducción natural)

Ejercicios (I)

- Aplicar el método de resolución
  - S = {p, q ∨ ¬p ∨ ¬t, t ∨ s, ¬s, ¬q}

C_1:	p	
C_2:	$q \vee \neg p \vee \neg t$	
C_3:	$t \vee s$	
C_4:	$\neg s$	
C_5:	$\neg q$	
C_6:	t	(C_3, C_4)
C_7:	$q \vee \neg t$	(C_1, C_2)
C_8:	q	(C_6, C_7)
C_9:	$\square$	(C_5, C_8)

S es insatisfacible

Ejercicios (II)

- Aplicar el método de resolución
  - S = {p, q ∨ ¬p ∨ ¬t, t ∨ s, ¬s}

C_1: p	1ª iteración	C_5:	$q \vee \neg t$	(C_1, C_2)
C_2: $q \vee \neg p \vee \neg t$		C_6:	$q \vee \neg p \vee s$	(C_2, C_3)
C_3: $t \vee s$		C_7:	t	(C_3, C_4)
C_4: $\neg s$	2ª iteración	C_8:	$q \vee s$	(C_3, C_5)
		C_9:	q	(C_5, C_7)
		C_{10}:	$q \vee \neg p$	(C_4, C_6)
	3ª iteración		(nada más)	

- cada parte de la derivación corresponde a una iteración del bucle
- no se han representado los resolventes repetidos
- al no poder hallar la cláusula vacía y ni generar más resolventes se demuestra la satisfacibilidad de S

Ejercicios (III)

- Demostrar mediante resolución básica si el siguiente conjunto de clausular es insatisfacible:
  - {C1: $\neg p \lor \neg q \lor r$, C2: $q \lor \neg r$, C3: $q \lor t$, C4: $p \lor s$, C5: $\neg s$, C6: $\neg r$, C7: $\neg t$}
    - R1: $\neg p \lor \neg q$ C1, C6
    - R2: $\neg p \lor t$ R1, C3
    - R3: $\neg p$ R2, C7
    - R4: s R3, C4
    - R5: $\square$ R4, C5

Ejercicios (IV)

- Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de Resolución:
  - T $[\neg s \wedge (r \rightarrow t), \neg r \rightarrow (p \rightarrow q), t \rightarrow \neg r] \vdash \neg s \wedge \neg(\neg q \wedge p)$

Resolución Básica

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA